TD limites de suites

Détermination de limite par la définition

24 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2 + n.$$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x > 10\,000$.
b) En déduire un rang à partir duquel $v_n > 10\,000$.
c) Trouver de même un rang à partir duquel $v_n > 10^9$.
d) Conjecturer la limite de la suite.

25 La suite (h_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$h_n = 6 - 2n.$$

A désigne un nombre réel quelconque.
a) À partir de quel entier naturel n a-t-on :
• $h_n < -10$? • $h_n < -100$?
b) À partir de quel entier naturel n a-t-on $h_n < A$?
c) En déduire la limite de la suite (h_n).

26 (t_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = -n^2$.
A désigne un nombre réel négatif quelconque.
a) À partir de quel entier naturel n a-t-on $-n^2 < A$?
b) En déduire la limite de la suite (t_n).

35 (e_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $e_n = \dfrac{10}{n+1}$.
a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 100$, $-10^{-1} \leqslant e_n \leqslant 10^{-1}$.
b) Déterminer à partir de quel entier naturel n,

$$-10^{-5} \leqslant e_n \leqslant 10^{-5}.$$

c) Conjecturer la limite de la suite (e_n).

36 (I_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mathrm{I}_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
a) À partir de quel entier naturel n, $4{,}9 < \mathrm{I}_n < 5{,}1$?
b) À partir de quel entier naturel n, $4{,}99 < \mathrm{I}_n < 5{,}01$?
c) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ désignent deux nombres réels.
Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5 + \beta \text{ équivaut à } 5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5.$$

d) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$5 - \alpha < \mathrm{I}_n < 5 \text{ équivaut à } \frac{1}{\alpha} < n.$$

e) En déduire la limite de la suite (I_n).

Détermination et calculs de limites

Pour les exercices 53 et 54, étudier la limite de chaque suite.

53 **a)** Pour tout entier naturel n, $u_n = n + n^2$.
b) Pour tout entier naturel n, $v_n = n\sqrt{n}$.
c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = 2n - \dfrac{1}{n}$.
d) Pour tout entier naturel n, $h_n = \dfrac{1}{n^2+3}$.

54 **a)** Pour tout entier naturel n, $u_n = 8{,}2 - 4\sqrt{n}$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1$.
c) Pour tout entier naturel n, $w_n = (8-n)(2n^2+1)$.
d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)(2 - \sqrt{n})$.
e) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{4+n}{2-\dfrac{1}{n}}$.
f) Pour tout entier naturel n, $c_n = \dfrac{40}{2n+3}$.

55 (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 4 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 6.$$

a) À l'aide d'une somme, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n = 10$.
b) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
c) Déterminer enfin la limite de la suite (v_n).

75 Une suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ.
(v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 8u_n + \dfrac{2}{n+1} + 14$.
a) Démontrer que la suite (v_n) est convergente et exprimer sa limite en fonction de ℓ.
b) Déterminer la valeur de ℓ sachant que les deux suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

77 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n}{n+1} + n$.
a) Tabuler et représenter graphiquement la suite (u_n) à l'écran de la calculatrice. Conjecturer sa limite.
b) En s'appuyant sur la représentation graphique et sur les premiers termes, conjecturer une expression de $3u_n + 1$ en fonction de n.
c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Pour les exercices 58 à 60, déterminer la limite de la suite (u_n) après avoir levé l'indétermination.

58 Pour tout entier naturel n, $u_n = -n^2 + 4n + 2$.

59 Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

60 Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{40n+1}{n^2+2}$.

72 (d_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$d_n = \frac{n^2+2n+6}{n+1}.$$

a) Montrer que pour tout n, $d_n = n + 1 + \dfrac{5}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (d_n).

76 (S_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}.$$

a) Justifier que $S_1 = 1$, $S_2 = 1{,}5$ et $S_3 = 2$.

b) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = 0{,}5n + 0{,}5$.

c) En déduire la limite de la suite (S_n).

80 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + \dfrac{1}{1+2}$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \ldots + \frac{1}{1+2+\ldots+n}.$$

1. Calculer les termes u_3 et u_4.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \frac{1}{1+2+\ldots+n}.$$

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$.

c) Étudier alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

d) Est-il vrai que : « La somme de n termes généraux qui tendent chacun vers 0 tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$ » ? Justifier.

39 Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) définie par :

a. $u_n = -25\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ **b.** $u_n = -7\left(\sqrt{3}\right)^n$ **c.** $u_n = -2\left(\dfrac{10}{7}\right)^n$

d. $u_n = (-\pi)^n$ **e.** $u_n = 3^{n+1}$

61 Capacité 4, p. 131

1. $u_n = n^2 - 2n$ **2.** $u_n = -3n^2 + 6n + 7$

3. $u_n = n^3 - 3n^2 + 2n - 5$ **4.** Pour $n > 2$, $u_n = \dfrac{3n+5}{n^2-4}$

5. $u_n = \dfrac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n}$ **6.** $u_n = \dfrac{5+n+n^2}{n}$

62 **1.** $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$ **2.** $u_n = \dfrac{6\sqrt{n} - n}{\sqrt{n}+n}$

3. $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n}}$ **4.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^3}$

63 **1.** $u_n = 5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n}$

2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(-3n+5)$ **3.** $u_n = \dfrac{5n^3 - 3n^2 + 2\sqrt{n}}{n}$

Pour les exercices 64 et 65, déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, en utilisant les théorèmes de comparaison.

64 Capacité 5, p. 133

1. $u_n = n - \sin n$ **2.** $u_n = -n^2 + \cos n$

3. $u_n = \dfrac{n}{2+\cos n}$ **4.** $u_n = \dfrac{n - \sin n}{n^2+1}$

65 **1.** $u_n = \dfrac{4n + (-1)^n}{n+2}$ **2.** $u_n = 5n^3 + (-1)^n$

3. $u_n = \dfrac{-n+(-1)^n}{2n-(-1)^n}$ **4.** $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}}{n}$

66 **1.** Soit (u_n) une suite qui vérifie $u_n \geqslant 3n^2 - 1$ pour tout entier naturel n. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \leqslant -5n$ pour tout entier naturel n.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Soit (u_n) une suite telle que $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

Utilisation des théorèmes de comparaison

Pour les exercices 82 à 84, déterminer une suite (v_n) de limite $-\infty$ telle que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et indiquer la limite de la suite (u_n).

82 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = -\sqrt{n^2+n}$.

83 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - e^{12n}$.

84 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n\sin(n) - n^2$.

Utilisation des théorèmes d'encadrement

92 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n}\sqrt{n^2+4}$.

a) Montrer que pour tout n, $n^2 \leqslant n^2+4 \leqslant (n+2)^2$.

b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{2}{n}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

93 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Un tableau de valeurs, arrondies au millième si besoin, est donné ci-dessous.

n	0	1	10	100	1 000	10 000
u_n	1	0,414	0,154	0,05	0,016	0,005

a) Conjecturer la limite de (u_n).

b) Démontrer que pour tout n, $u_n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = 1$.

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

94 (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = e^{\frac{8}{n}}$.

a) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 4x - 1$ est décroissante sur $[0\,;1]$.

b) En déduire que pour tout réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$1 \leqslant e^x \leqslant 1+4x.$$

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 8$, $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{1}{2n}$.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

94 Capacité 9, p. 136

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels positifs par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.
Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$.
b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$ et en déduire la limite de la suite (u_n).

95 Une question ouverte

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

73 Déterminer la limite de chacune des suites ci-dessous définies pour tout entier naturel n non nul par :

a. $u_n = 0{,}5^n \cos n$ **b.** $u_n = 3^n + \sin n$ **c.** $u_n = \frac{1}{n}\sin(2^n)$

Piste : *Utiliser un encadrement du sinus ou du cosinus d'un réel.*

Convergence monotone

91 CALC Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2\,020$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est minorée par 1.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n).

Piste : *Utiliser le fait que la fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.*

92 CALC Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1{,}8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est bornée par 1 et 2.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
4. Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n).

Piste 2. : *Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{3-x}$ sur l'intervalle $[0\,;3[$.*

88 Capacité 8, p. 135

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1. Démontrer par récurrence que cette suite est majorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
3. Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

79 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = -\dfrac{2}{3} \\ v_{n+1} = -2v_n + 1 \end{cases}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{1}{3} - (-2)^n.$$

2. Étudier la convergence de la suite (v_n).

80 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à 0.

2. On peut alors introduire alors la suite auxiliaire (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. Expliciter t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

80 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$ et $u_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à 0.

2. On peut alors introduire alors la suite auxiliaire (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. Expliciter t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

3. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

4. En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

98 CALC TABLEUR PYTHON

Écrire et exécuter un programme

Un groupe d'économistes étudie le taux de disponibilité des ressources alimentaires nécessaires pour le développement de la population d'un pays émergent.

Ce taux dépend notamment du nombre d'habitants, de la quantité de nourriture, de l'espace agricole disponible et de l'état sanitaire de la population. Une étude menée en 2019 a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

Pour tout entier naturel n, on appelle R_n le taux de disponibilité des ressources pour l'année $2019 + n$. On a ainsi $R_0 = 0{,}9$.

On choisit le modèle de Verhulst pour définir la suite (R_n).

Pour tout entier naturel n, on a :

$R_{n+1} = R_n - 0{,}1R_n^2$.

1. Une partie des économistes estiment qu'en 2024, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,6.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier en utilisant votre calculatrice.

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0{,}1x^2$. Ainsi, la suite (R_n) vérifie pour tout entier naturel n la relation $R_{n+1} = f(R_n)$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant R_{n+1} \leqslant R_n \leqslant 1$.

c. La suite (R_n) est-elle convergente ?

3. Le groupe d'économistes affirme que selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,6 au cours des 20 premières années qui suivent l'année 2024 et qu'il est capable de déterminer en quelle année ce seuil sera atteint pour la première fois.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Justifier en utilisant le tableur ou un programme.

ÉNONCÉ ALGO RAISONNER CALCULER

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
- la suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre se termine et ce que renvoie l'appel algo(6).

4. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$.

```python
def algo(p):
    u=1
    n=0
    while u<=10**p:
        u=2*u-n+3
        n=n+1
    return n
```

D'après Bac S, Pondichéry, Avril 2017

Déterminer une limite à l'aide des règles sur les opérations

103 20 min Capacité 3, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n non nul.

a. $u_n = 3 - 2n - 5\sqrt{n}$ b. $u_n = -3n^3 - n^2 - n + 5$

c. $u_n = 3n^2 + 2n - \dfrac{1}{n}$

104 10 min Capacité 3, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n non nul.

a. $u_n = (1 - n^2)(1 + \sqrt{n})$ b. $u_n = (n^3 - 1)\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)$

105 10 min Capacité 4, p. 131

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

On considère les suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = -3n^2 + 8n + 1$. Alors la suite (u_n) converge vers 1.
2. $u_n = 3n^3 - 2n^2 + 3$. Alors la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

106 10 min Capacité 4, p. 131

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes définies pour tout entier naturel n non nul.

a. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(-5n^2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ b. $u_n = (n-1)\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Utiliser les théorèmes de comparaison

107 15 min Capacité 5, p. 133

Déterminer la limite de (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 en utilisant les théorèmes de comparaisons.

a. $u_n = n - \sin(n)$ b. $u_n = \dfrac{n - \cos(n)}{n^2 - 1}$

c. $u_n = -\sqrt{n} + \cos(n^2)$

108 15 min Capacité 5, p. 133

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

a. $u_n = \dfrac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$ b. $u_n = 2n^3 - (-1)^n$

c. $u_n = \dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n}$

109 15 min Capacités 5 et 9, p. 133-136

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n{}^2 + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2^n$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

110 20 min Capacités 5 et 6, p. 133

VRAI/FAUX

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Toutes les suites arithmétiques sont divergentes.
2. La suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{\cos(n) - n}{\sqrt{n}}$ converge vers 0.

Utiliser la limite d'une suite géométrique

111 30 min Capacité 6, p. 133

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

1. $u_n = \dfrac{4 \times 21^n}{12 \times 7^n}$ 2. $u_n = \left(\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^n$ 3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$

4. $u_n = -3 \times 15^n + 5^n - 1$ 5. $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{2^n + 5^n}$

112 30 min Capacités 5 et 6, p. 133

Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).

a. $u_n = \left(\dfrac{99}{100}\right)^n \sin(n)$ b. $u_n = 4^n - (-1)^n$

c. La suite (u_n) vérifie pour tout entier naturel n,

$$4 - 0{,}9^n \leqslant u_n \leqslant 4 + 0{,}1^n.$$

Étudier la convergence d'une suite majorée ou minorée

113 10 min Capacité 7, p. 135

1. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 + 4n - 3$ est minorée par -5.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}v_n{}^2 + 8}$ est majorée par 8.

114 30 min Capacités 7, 8 et 9 pp. 135-136

QCM *Choisir la ou les bonnes réponses.*

La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \cos(n) + \sin(n)$ est :

a. bornée par -2 et 1.

b. bornée par -1 et 1.

c. minorée par -2 et majorée par 2.

d. minorée par -3 et majorée par 2.

115 30 min Capacités 9 et 10 pp. 136-137

Fin 2020, un club de rugby comptait 7 000 abonnés. À la fin de chaque année, le club constate que 20 % des abonnés ne se réabonnent pas et que 4 000 nouveaux abonnés arrivent. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2020 + n$.

1. Préciser a_0 et expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}80a_n + 4\,000$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est majorée par 20 000.
3. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
4. En déduire la convergence de la suite (a_n).